METHODE DE DICHOTOMIE

*** Principe**

Cette méthode de résolution d'une équation du type $f(x)=0$ dont on a séparé une racine est basée sur le théorème de Cauchy (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :

> Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a).f(b)<0$. Alors f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.
> Si, de plus, f est monotone sur $[a,b]$, alors f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$.

*** Méthode**

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$. On suppose que f possède un unique zéro α sur $]a,b[$.

On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$a_0=a$, $b_0=b$, et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n).f(\tfrac{1}{2}(a_n+b_n))<0 \\ \tfrac{1}{2}(a_n+b_n) & \text{si } f(\tfrac{1}{2}(a_n+b_n)).f(b_n)\leq 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1}=\begin{cases} \tfrac{1}{2}(a_n+b_n) & \text{si } f(a_n).f(\tfrac{1}{2}(a_n+b_n))\leq 0 \\ b_n & \text{si } f(\tfrac{1}{2}(a_n+b_n)).f(b_n)<0 \end{cases}$$

alors les suites a et b sont adjacentes de même limite α.

On vérifie aisément que a_n et b_n sont des approximations respectivement par défaut et par excès de α à $(b-a)/2^n$ près. On en déduit que pour avoir une approximation de α à 10^{-p} près il faut calculer n_0 termes des suites a et b avec $n_0=E(\log_2[10^p(b-a)])+1$.

*** Exemple**

Approximation à 10^{-3} près de l'unique réel $\alpha\in[1,2]$ vérifiant $\alpha^2-2=0$. (il faudra donc 10 itérations.)
(α existe et est unique car la fonction $f:x\longmapsto x^2-2$, monotone continue sur $[1,2]$ est telle que $f(1).f(2)<0$)

$f(1).f(1.5)<0$	donc	$1<\alpha<1.5$
$f(1.25).f(1.5)<0$	donc	$1.25<\alpha<1.5$
$f(1.375).f(1.5)<0$	donc	$1.375<\alpha<1.5$
$f(1.375).f(1.4375)<0$	donc	$1.375<\alpha<1.4375$
$f(1.40625).f(1.4375)<0$	donc	$1.40625<\alpha<1.4375$
$f(1.40625).f(1.421875)<0$	donc	$1.40625<\alpha<1.421875$
$f(1.4140625).f(1.421875)<0$	donc	$1.4140625<\alpha<1.421875$
$f(1.4140625).f(1.4179687)<0$	donc	$1.4140625<\alpha<1.4179687$
$f(1.4140625).f(1.4160156)<0$	donc	$1.4140625<\alpha<1.4160156$
$f(1.4140625).f(1.415039)<0$	donc	$1.4140625<\alpha<1.415039$

ainsi 1.414 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de α. (la valeur exacte de α étant $\sqrt{2}$!)